

Politechnika Gdańska
Wydział Mechaniczny
Katedra Konstrukcji I Eksploatacji Maszyn



Wyznaczanie charakterystyki sprężyny śrubowej

autorzy:

mgr inż. Marek Łubniewski

dr inż. Michał Wodtke

mgr inż. Katarzyna Mazur

Gdańsk 2018

1. Wstęp

Zasadniczą cechą elementów podatnych (łączników sprężystych) jest ich duża odkształcalność uzyskiwana poprzez nadanie elementowi odpowiedniego kształtu (np. sprężyna śrubowa) lub zastosowanie do jego wytworzenia materiału o stosunkowo małej wartości modułu sprężystości (np. guma). Elementy podatne mogą spełniać w budowie maszyn różnorodne zadania, takie jak:

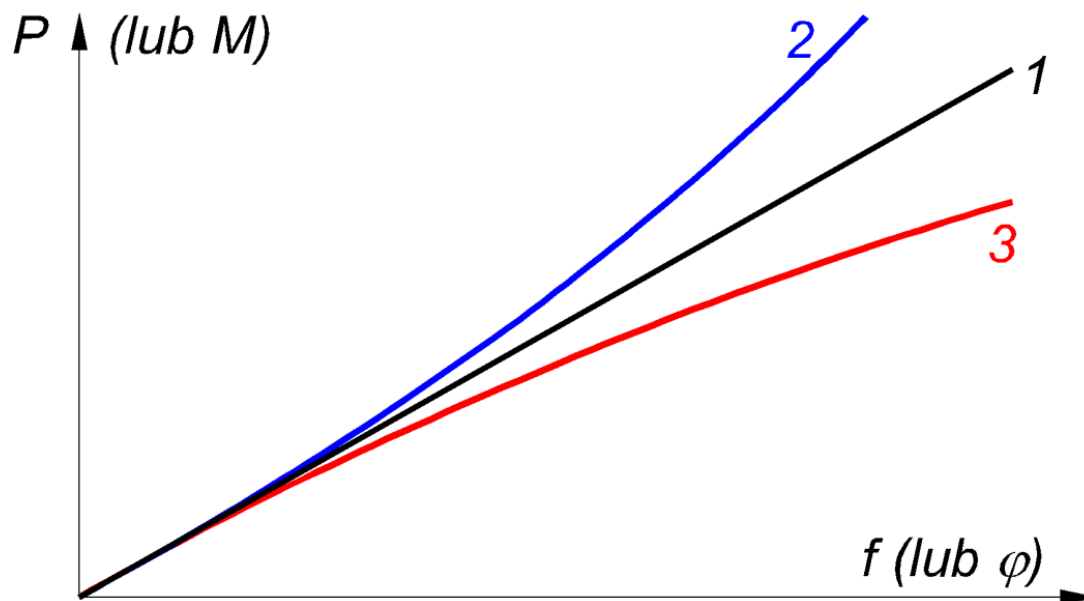
- Wywieranie określonej siły z możliwością jej regulacji i pomiaru,
- Akumulowanie energii i wykonywanie określonej pracy mechanicznej,
- Minimalizacja obciążeń uderowych i okresowo zmiennych, tłumienie drgań,

Charakterystyczną cechą elementów podatnych jest **sztywność** c definiowana, jako pochodna obciążenia względem odkształcenia wywołanego tym obciążeniem:

$$c = \frac{dP}{df}; \quad c = \frac{dM}{d\varphi} \quad (1.1)$$

gdzie: P, M – siła lub moment – obciążenie elementu podatnego
 f, φ – wydłużenie lub obrót – odkształcenie elementu podatnego

Wartość i zmienność sztywności stanowią zasadnicze cechy, tzw. **charakterystykę elementu podatnego**. Charakterystyka łącznika podatnego może być linią prostą we współrzędnych P, f lub (M, φ) , linią krzywą progresywną lub degresywną – Rys. 1.



Rysunek 1. Charakterystyka elementów podatnych
1-liniowa, 2-progresywna, 3-regresywna

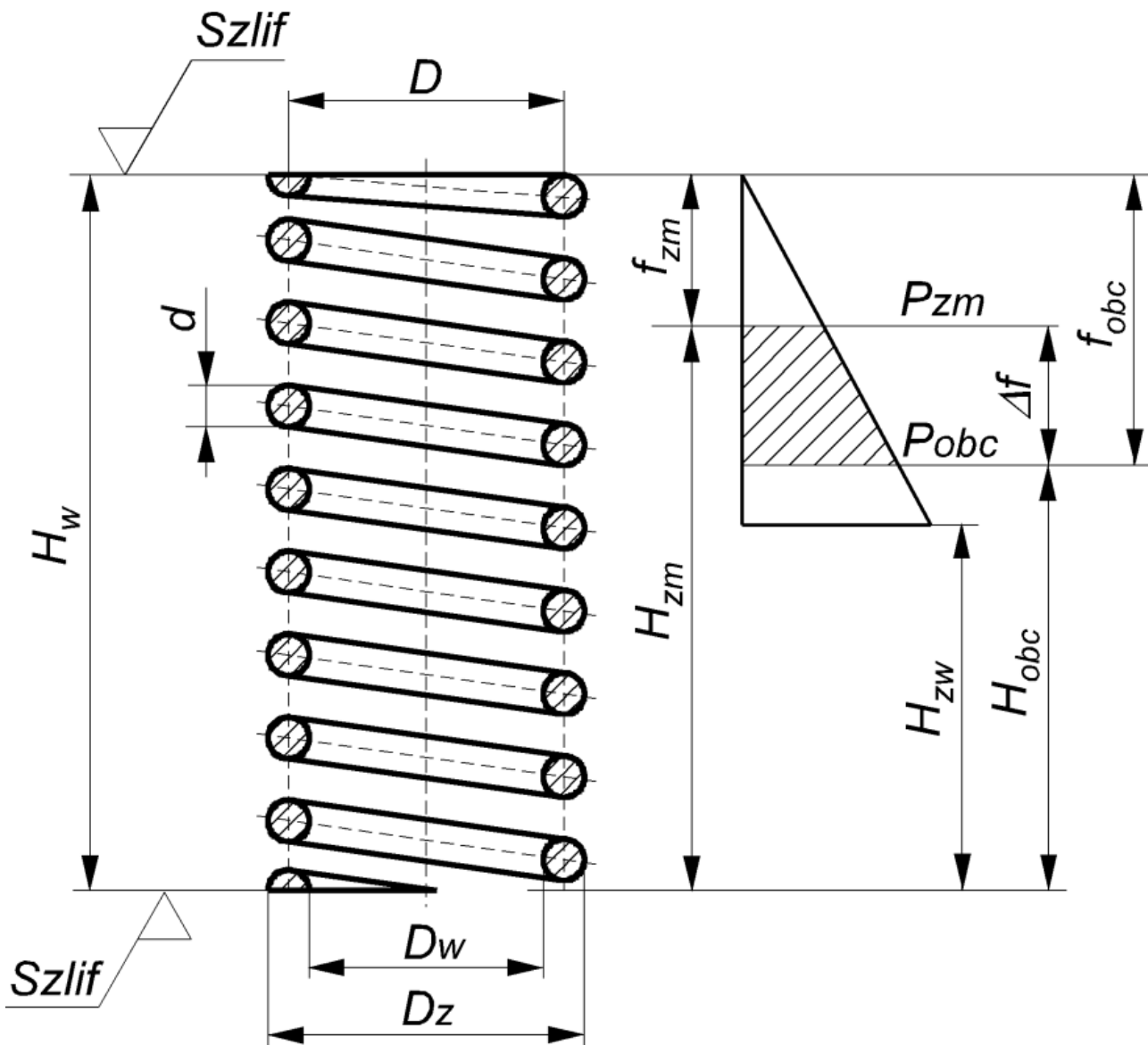
2. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest ugruntowanie oraz pogłębienie wiedzy dotyczącej sprężystych elementów maszyn a w szczególności sprężyn śrubowych. Cel ten realizowany będzie poprzez:

- Pomiar oraz identyfikację podstawowych własności sprężyny śrubowej,
- Doświadczalne wyznaczenie charakterystyki sprężyny śrubowej oraz porównanie jej do charakterystyki wyznaczonej z wykorzystaniem zależności teoretycznych,
- Ocenę możliwych źródeł różnic wyników pomiarów oraz obliczeń sztywności sprężyny śrubowej.

3. Obiekt badań

W ramach ćwiczenia laboratoryjnego wyznaczona zostanie charakterystyka sprężyny walcowej śrubowej naciskowej (ściskanej) wykonanej z pręta o kołowym kształcie przekroju poprzecznego (Rys.2). Sprężyny naciskowe posiadają szereg zalet tj.: dużą podatność (definiowaną, jako odwrotność sztywności $1/c$), dużą zdolność akumulowania energii przy małych wymiarach i ciężarze, brak uchwytów, prostotę kształtu (łatwość wykonania), dobre wykorzystanie materiału i zajmowanej przestrzeni, centryczne przeniesienie siły.



Rysunek 2. Sprężyna walcowa śrubowa naciskowa o pręcie okrągłym z zaznaczeniem charakterystycznych wielkości: d – średnica drutu, D_w – średnica wewnętrzna sprężyny, D_z – średnica zewnętrzna sprężyny, D – średnia średnica sprężyny, H_w – długość swobodna sprężyny, H_{zm} , (f_{zm}) – długość (ugięcie) sprężyny po zmontowaniu, H_{obc} , (f_{obc}) – długość (ugięcie) sprężyny pod obciążeniem, H_{zw} – długość sprężyny ściśniętej do zetknięcia zwojów (zblokowanej), Δf – ugięcie robocze sprężyny.

Dla uzyskania dobrego przylegania do powierzchni oporowych końce sprężyn muszą być przygięte i zeszlifowane, co najmniej na $\frac{3}{4}$ obwodu sprężyny (Rys.2).

Między zwojami sprężyny, nawet pod największym obciążeniem roboczym, powinien być zachowany luz.

Sprężyny tego typu wykazują liniową charakterystykę sztywnościową, co oznacza stałą wartość sztywności sprężyny dla całego zakresu obciążeń oraz ugięć elementu podatnego.

Sztywność c walcowej sprężyny śrubowej wyznaczyć można wg zależności 3.1. Czynna liczba zwojów sprężyny i_c wykorzystywana do wyznaczenia jej sztywności obliczana jest, jako różnica całkowitej liczby zwojów oraz liczby zwojów przygiętych i zeszlifowanych na końcach sprężyny.

$$c = \frac{P}{f} = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot i_c \cdot D^3} \quad (3.1)$$

gdzie:

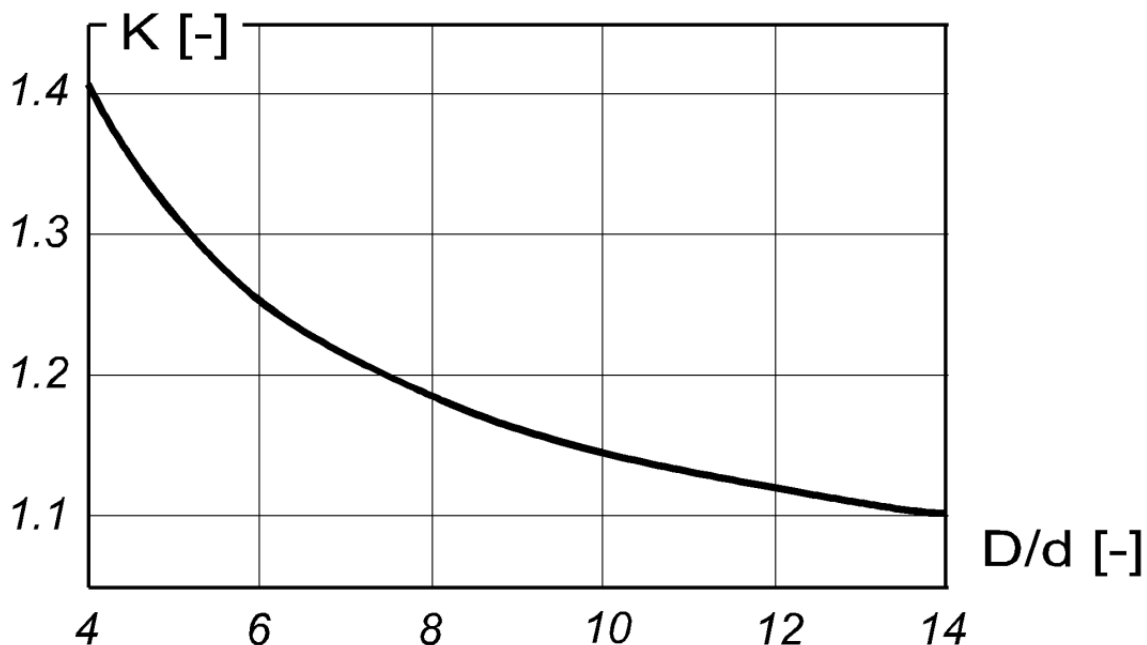
G – moduł sztywności poprzecznej materiału sprężyny (dla stali 79.3 GPa)

i_c – czynna liczba zwojów sprężyny (zwojów pracujących)

Pręt sprężyny śrubowej walcowej, na którą działa siła osiowa, poddany jest głównie skręcaniu i ścinaniu. Pozostałe składniki obciążenia w zwykle stosowanych sprężynach o małym skoku (kąt wzniosu linii śrubowej pręta mniejszy od 80), jak ściskanie (rozciąganie) i zginanie są pomijalnie małe. Naprężenia występujące w przekroju poprzecznym pręta stanowią, więc sumę naprężeń skręcających i tnących. Maksymalną wartość naprężeń zredukowanych dla drutu stalowego ($\nu = 0.3$) z uwzględnieniem jego krzywoliniowości wyznaczyć można wg zależności 3.2:

$$\tau_{max} = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3} \cdot K \quad (3.2)$$

gdzie: K – współczynnik zależny od proporcji D/d (Rys.3).



Rysunek 3. Wartości współczynnika K dla sprężyn stalowych wykonanych z drutu okrągłego.

Naprężenia dopuszczalne dla materiału sprężyny wyznacza się wg zależności 3.3:

$$k_s = \frac{R_m}{x_m} \quad (3.3)$$

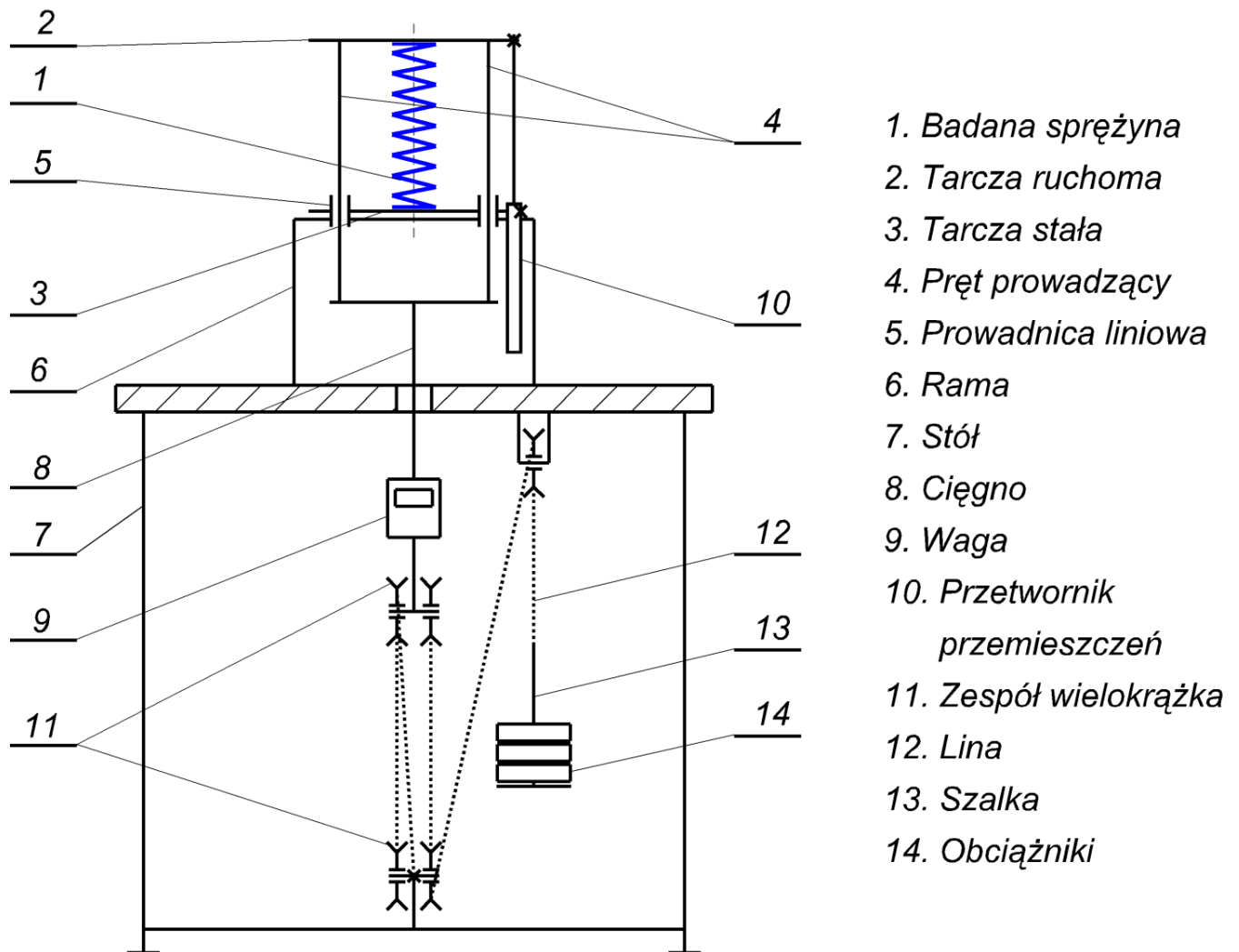
gdzie:

R_m – granica wytrzymałości na rozciąganie materiału sprężyny [MPa],

x_m – współczynnik bezpieczeństwa [-], $x_m \geq 2$ (zwykle przyjmuje się $x_m=2$).

Granica wytrzymałości drutu sprężynowego jest funkcją jego średnicy, im jest ona mniejsza tym wartość R_m jest większa (dla drutu sprężynowego o średnicy $d=5$ [mm] $R_m = 1190$ [MPa]). Oddzielne zagadnienie stanowi problem wyboczenia sprężyn naciskowych. Sprężyny o dużym stosunku H_w/D mogą się wybaczać, zapobiec temu można poprzez zastosowanie elementu prowadzącego w postaci pręta w środku lub rurki na zewnątrz lub zmianę zamocowania końców (zmniejszenie długości wyboczeniowej sprężyny).

4. Opis stanowiska badawczego

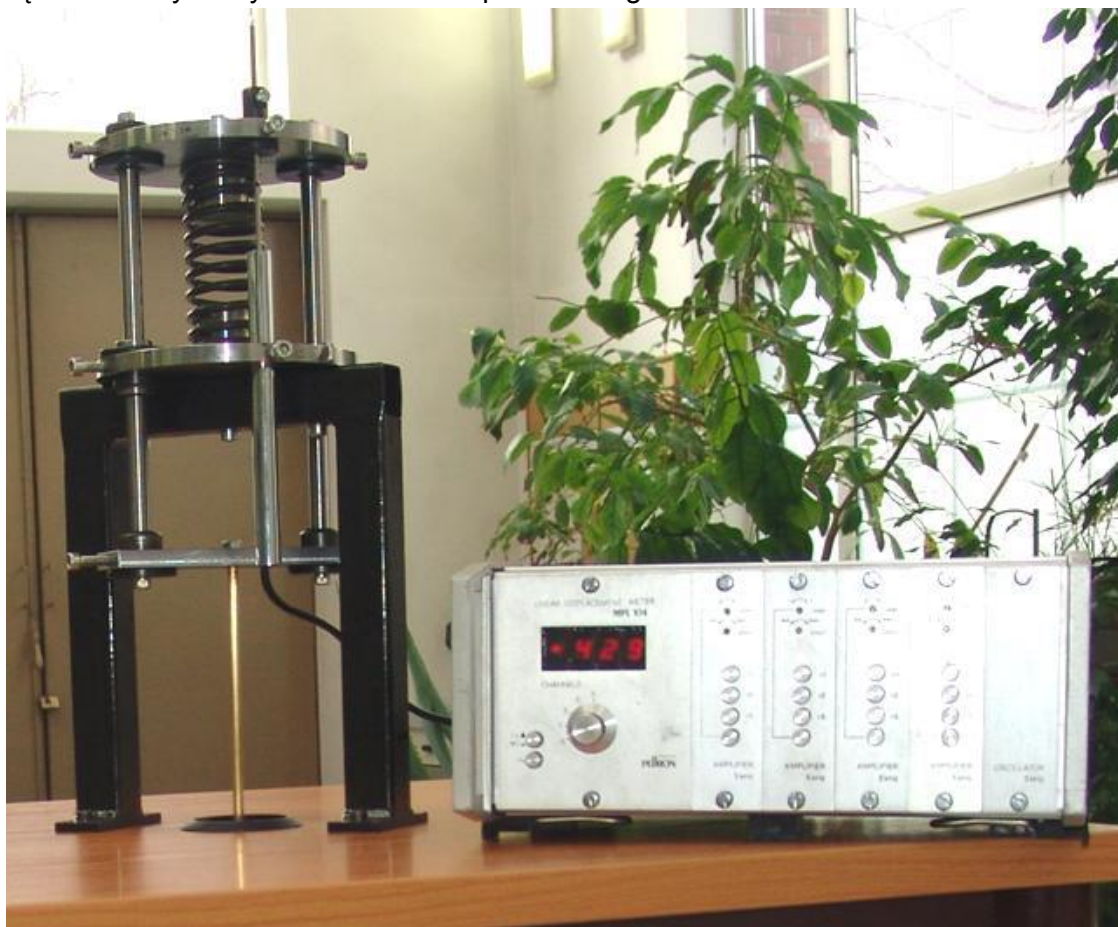


Rysunek 4. Schemat stanowiska badawczego do wyznaczania charakterystyki sprężyny śrubowej.

Badana sprężyna (1) umieszczona jest pomiędzy dwiema tarczami stanowiska badawczego: stałą (3) połączoną z ramą (6) oraz ruchomą (2). Rama stanowiska zamocowana jest do stołu (7). Do tarczy ruchomej (2) przymocowane są dwa pręty prowadzące (4), które współpracują z liniowymi prowadnicami tocznymi (5) osadzonymi w tarczy stałej (3). Badana sprężyna (1) jest obciążana obciążnikami (14) umieszczanymi na szalce (13), która połączona jest z ciągnem (8) za pomocą liny (12) i zespołu wielokrążka (11) wprowadzającego zwielokrotnienie siły w układzie obciążenia sprężyny. Pomiaru obciążenia dokonuje się za pomocą wagi (9) umieszczonej między ciągnem i zespołem wielokrążka (11), pomiaru ugięcia sprężyny natomiast za pomocą indukcyjnego przetwornika przemieszczeń (10) współpracującego ze wzmacniaczem sygnału.

4.1. Pomiar ugięcia sprężyny

Pomiar ugięcia sprężyny realizowany jest z wykorzystaniem transformatorowego przetwornika przemieszczeń liniowych PJx50 produkcji PELTRON. W cewce czujnika zamocowanej do tarczy stałej stanowiska przemieszcza się rdzeń magnetyczny (zamocowany do tarczy ruchomej) zmieniający w zależności od swego położenia względem cewki jej indukcyjność (Rys.5). Przetwornik połączony jest do wzmacniacza sygnału z wyświetlaczem cyfrowym, co pozwala na odczyt wartości napięcia U będącego funkcją przemieszczenia (ugięcia sprężyny). Zakres pomiarowy przetwornika wynosi 50 [mm] z błędem maksymalnym 0.5% zakresu pomiarowego.



Rysunek 5. Układ pomiaru ugięcia sprężyny.

Zakres napięć U możliwych do odczytania ze wzmacniacza sygnału jest ograniczony w zakresie $-10 : 10$ [V], co odpowiada przemieszczeniu rdzenia w cewce w zakresie $0 : 50$ [mm] (1 [V] = 2.5 [mm]). Z powodu tego ograniczenia wyniki pomiaru ugięcia sprężyny Δf muszą być wyliczane, jako przyrosty względem wartości początkowej. Dodatkowo należy je przeliczyć na jednostkę długości, tak jak pokazano to na poniższym przykładzie.

Lp.	F_0	F	U	ΔU	$\Delta f = \Delta U \times 2.5$
	[N]	[N]	[V]	[V]	[mm]
0	29.81	0	-8.63	0	0
1	63.25	33.44	-7.40	1.23	3.07
2	100.22	70.41	-5.99	2.64	6.60

4.2. Pomiar obciążenia sprężyny

Pomiar obciążenia sprężyny w stanowisku badawczym realizowany jest z wykorzystaniem tensometrycznego czujnika siły KMM20-2kN. Zakres pomiarowy czujnika wynosi 2 kN z maksymalnym błędem pomiarowym $0,5\%$ zakresu pomiarowego. Czujnik umieszczono w stanowisku pomiarowym pomiędzy układem wielokrążka oraz ciągnem, w ten sposób pomiar obciążenia nie jest zakłócony przez straty występujące w układzie wielokrążka.

Przed założeniem kolejnego ciężarka na szalkę, należy odczekać $30-60$ sekund do ustabilizowania się odczytu.

Wartości w Newtonach odczytujemy ze wskaźnika pomiarowego.

5. Organizacja i przebieg ćwiczenia

Zadaniem studentów w ramach ćwiczenia jest **doświadczalne wyznaczenie charakterystyki sprężyny ściskanej, porównanie jej do charakterystyki teoretycznej oraz wyciągnięcie wniosków, co do możliwych przyczyn notowanych różnic**. Wykonując badanie sprężyny otrzymuje się pary wartości: siłę działającą na sprężynę i odpowiadającą jej wartość ugięcia sprężyny. Ze względu na błędy pomiaru spowodowane niedokładnościami przyrządów pomiarowych, otrzymane wyniki nie będą leżały na jednej prostej, stąd potrzeba opracowania wyników pomiarów z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów.

5.1. Czynności do wykonania przez studentów

Studenci przed przybyciem na ćwiczenie laboratoryjne zobligowani są do zapoznania się z niniejszą instrukcją wprowadzającą w tematykę oraz opisującą sposób prowadzenia pomiarów.

Każda grupa laboratoryjna zostaje wcześniej arbitralnie podzielona na dwie podgrupy, dla których najpóźniej tydzień przed ćwiczeniem, na stronie internetowej Katedry KMiP oraz na tablicach informacyjnych katedry i w laboratorium podane zostaną parametry geometryczne dwóch sprężyn (po jednej dla każdej podgrupy).

Studenci każdej z podgrup przed przystąpieniem do zajęć pobierają ze strony katedry plik z szablonem sprawozdania i na jego wydruku wyznaczają dla przypisanej im sprężyny: jej sztywność teoretyczną c , naprężenia maksymalne w materiale sprężyny τ_{max} oraz rysują teoretyczną charakterystykę sprężyny na wykres $P = f(\Delta f)$ (wypełniają odręcznie część sprawozdania zaznaczoną czerwoną ramką na str. 1 oraz wykres na str. 4 szablonu sprawozdania).

Do zasadniczej części zajęć laboratoryjnych dopuszczeni zostaną tylko ci studenci, którzy przed rozpoczęciem zajęć przedstawią prowadzącemu poprawnie wypełnioną część szablonu sprawozdania, o której mowa wyżej! Przed ćwiczeniem

5.2. Czynności do wykonania przez studentów w trakcie ćwiczenia

Zasadnicza część zajęć podzielona została na trzy etapy:

ETAP I – identyfikacja sprężyny.

W tej części studenci wybierają z grupy sprężyn tę, której parametry zostały im wcześniej narzucone oraz dokonują jej oględzin i pomiarów wypełniając do końca pozostałą część tabeli z punktu 1 szablonu sprawozdania.

ETAP II – pomiar ugięcia sprężyny oraz odpowiadającego mu obciążenia na stanowisku badawczym.

Po identyfikacji sprężyny studenci każdej z podgrup kolejno umieszczają swoją sprężynę w stanowisku badawczym i dokonują jej pomiarów wypełniając tabele umieszczone w punkcie 3 sprawozdania (każda podgrupa bada tylko jedną wcześniej zidentyfikowaną sprężynę).

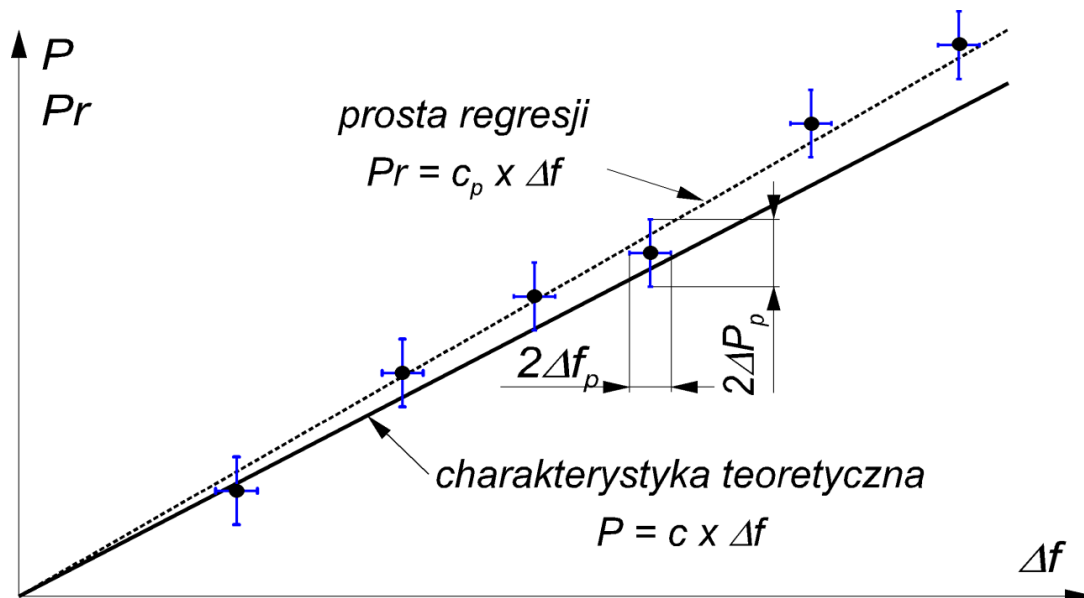
Badanie sprężyny na stanowisku pomiarowym odbywa się wg następującego porządku:

- Przed umieszczeniem sprężyny w stanowisku badawczym należy upewnić się czy szalka jest pusta,
- Umieścić sprężynę na stanowisku badawczym,
- Odczytać ze wzmacniacza oraz zapisać w tabeli pomiarowej początkową wartość napięcia,
- Odczytać z siłomierza oraz zapisać w tabeli pomiarowej początkową wartość siły
- zmierzyć suwmiarką i zapisać długość sprężyny H_0 po zmontowaniu (sprężyna jest wstępnie obciążona masą tarczy ruchomej, prętów prowadzących, układem wielokrążka, liną i szalką)
- Delikatnie założyć ciężarek na szalkę, odczekać ok 60 sekund następnie odczytać i zapisać w tabeli wartość napięcia ze wzmacniacza sygnału oraz siły z siłomierza
- Ostatnią czynność powtarzać do momentu założenia na szalkę wszystkich 10 obciążników (cykl obciążania sprężyny),
- Zmierzyć suwmiarką i zapisać długość H sprężyny pod pełnym obciążeniem,

ETAP III – opracowanie wyników pomiarów, określenie maksymalnego błędu wyznaczonej wartości sztywności, wyciągnięcie wniosków.

W tej części zajęć studenci wykonują następujące zadania:

1. Wyznaczone doświadczalnie pary wartości (P_i , Δf_i) należy nanieść na wykres teoretycznej charakterystyki sprężyny (str. 4 sprawozdania) z zaznaczeniem wartości błędów pomiaru każdego punktu (Rys.7). Na tym etapie prowadzący wskaże każdemu ze studentów z osobna, który cykl wyników pomiarów sprężyny (obciążania czy odciążania) będzie przez niego w dalszej części opracowywany.



Rysunek 6. Wykres charakterystyki teoretycznej, prostej regresji dla sprężyny oraz punktów pomiarowych z zaznaczeniem wartości błędów pomiaru siły i przemieszczenia.

Błędy pomiarów ugięcia sprężyny oraz siły wyznaczyć można wykorzystując informacje o maksymalnym błędzie pomiarowym względem zakresu pomiarowego przetwornika przemieszczeń oraz siłomierza zamieszczone w punktach 4.1 oraz 4.2 instrukcji, i tak:

- maksymalny błąd pomiaru przemieszczenia Δf_p
 $\Delta f_p = \pm 0.5\% \cdot 50[mm] = \pm 0.25[mm]$;
- maksymalny błąd pomiaru siły ΔP_p
 $\Delta P_p = \pm 0,5\% \cdot 2000[N] = \pm 10[N]$;

2. Wyznaczenie sztywności sprężyny w oparciu o dane pomiarowe c_p (współczynnik kierunkowy prostej regresji, punkt 4 sprawozdania oraz ostatnie dwie kolumny tabeli w punkcie 3), wrysowanie prostej regresji dla badanej sprężyny na wykres (str. 4 sprawozdania).

Po zmierzeniu odpowiednich danych pomiarowych w postaci par wartości: siły osiowej obciążającej sprężynę oraz ugięć sprężyny należy następnie na tej podstawie wyznaczyć charakterystykę sprężyny, tak, aby błędy między wartościami mierzonymi a rzeczywistymi (leżącymi na prostej $P=f(\Delta f)$) były jak najmniejsze. W tym celu wykorzystamy metodę najmniejszych kwadratów. Sprowadza się to do tego, aby suma kwadratów odległości punktów pomiarowych od charakterystyki sprężyny była jak najmniejsza. Tak wyznaczoną prostą o równaniu $Pr = c_p \times \Delta f$ nazywamy **prostą regresji**, która z pewnym prawdopodobieństwem opisuje nam charakterystykę sprężyny (zakładamy dodatkowo, że charakterystyka przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc zerowemu ugięciu sprężyny odpowiada zerowa wartość siły, patrz Rys.7).

Współczynnik kierunkowy prostej regresji c_p będzie szukaną wartością sztywności badanej sprężyny wyznaczoną na podstawie danych pomiarowych.

Każdy punkt leżący na prostej regresji opisany jest zależnością: $Pr_i = c_p \times \Delta f_i$. Jeżeli dysponujemy N punktami pomiarowymi, to suma kwadratów odchyłek wartości zmierzonej P_i od wartości wyliczonej z zależności $Pr_i = c_p \times \Delta f_i$ wyraża się wzorem:

$$S = \sum_{i=1}^{i=N} [P_i - Pr_i]^2 = \sum_{i=1}^{i=N} [P_i - c_p \cdot \Delta f_i]^2 = \sum_{i=1}^{i=N} [P_i^2 - 2 \cdot c_p \cdot \Delta f_i \cdot P_i + c_p^2 \cdot \Delta f_i^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{i=N} [P_i^2] - 2 \cdot c_p \cdot \sum_{i=1}^{i=N} [\Delta f_i \cdot P_i] + c_p^2 \cdot \sum_{i=1}^{i=N} [\Delta f_i^2]$$

Suma S osiąga minimum, gdy pierwsza pochodna jest równa zero:

$$\frac{dS}{dc_p} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{i=N} [\Delta f_i \cdot P_i] + 2 \cdot c_p \cdot \sum_{i=1}^{i=N} \Delta f_i^2 = 0$$

stąd:

$$c_p = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} [\Delta f_i \cdot P_i]}{\sum_{i=1}^{i=N} \Delta f_i^2}$$

Prostą regresji wrysować na wykresie charakterystyki sprężyny (Rys.7)

3. Określić maksymalny błąd przypadkowy wyznaczonej wartości sztywności sprężyny c_p (5 punkt sprawozdania).

Wartość graniczną błędu przypadkowego Δc_p wyniku pomiaru sztywności sprężyny c_p obliczyć dla pomiaru, dla którego sprężyna obciążona była największą siłą oraz wykazywała największe ugięcie (P_{10} , Δf_{10}) wg zależności:

$$\Delta c_p = \pm \sqrt{\left(\frac{\delta c_p}{\delta \Delta f}\right)^2 + \left(\frac{\delta c_p}{\delta P} \cdot \Delta P_p\right)^2}$$

gdzie: $c_p = \frac{P}{\Delta f}$

$\frac{\delta c_p}{\delta \Delta f}$; $\frac{\delta c_p}{\delta P}$ - pochodne cząstkowe funkcji wyznaczone względem zmiennych Δf i P

Obliczenia należy wykonać zgodnie z poniższym przykładem

$P_{10} = 278.25$ [N]; $\Delta f_{10} = 15.45$ [mm] ($\Delta f_p = \pm 0.25$ [mm], $\Delta P_p = 9.81$ [N], obliczone wcześniej),

$$\Delta c_p = \pm \sqrt{\left(\frac{-P_{10}}{\Delta f_{10}^2} \cdot \Delta f_p\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta f_{10}} \cdot \Delta P_p\right)^2}$$

$$\Delta c_p = \pm \sqrt{\left(\frac{-278.25[N]}{(15.45[mm])^2} \cdot 0.25 [mm]\right)^2 + \left(\frac{1}{15.45[mm]} \cdot 9.81[N]\right)^2} = \pm 0.49 \left[\frac{N}{mm}\right]$$

5.3. Zaliczenie ćwiczenia

Zaliczenie ćwiczenia odbywa się na podstawie oceny poprawności oraz kompletności sprawozdania (komplet zadań + wnioski z analiz) wykonywanego w trakcie ćwiczenia laboratoryjnego. Sprawozdanie należy oddać nie później niż 7 dni od daty laboratorium.

Literatura

- [1]. Korewa W., Zygmunt K.: Podstawy Konstrukcji Maszyn, część II, WNT, Warszawa 1969.
- [2]. Maciakowski R.: Wykład z Podstaw Konstrukcji Maszyn z ćwiczeniami rachunkowymi. Elementy podane. Politechnika Gdańska, 1997.
- [3]. Dietrich M. (red.): Podstawy Konstrukcji Maszyn, tom III, PWN, Warszawa,